

Matematika pro 9. ročník základní školy

Řešení

Číselné výrazy

1. **Prvočíslo** je přirozené číslo, které je beze zbytku dělitelné právě dvěma různými přirozenými čísly, a to číslem jedna a sebou samým (tedy 1 není prvočíslo).
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 → 8 prvočísel

2. $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2$, $21 = 7 \cdot 3$, $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$, $36 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2^2$, $42 = 7 \cdot 2 \cdot 3$, $52 = 13 \cdot 2^2$, $60 = 5 \cdot 3 \cdot 2^2$

3. $\frac{3\frac{1}{4}}{\frac{17}{12}} = \frac{13}{4} \cdot \frac{12}{17} = \frac{13}{1} \cdot \frac{3}{17} = \frac{39}{17} = 2\frac{5}{17}$

4. $4 - 2 \cdot \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right) = 4 - 2 \cdot \frac{7-6}{8} = 4 - 2 \cdot \frac{1}{8} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ (větší než 3 a menší než 5)

5. $3 - 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + 2,5 = 3 - \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{2} = 3 - \frac{7}{5} + \frac{5}{2} = \frac{30-14+25}{10} = \frac{41}{10}$

6. $\left[\frac{\frac{1}{3} + \sqrt{0,25}}{\frac{4}{5} - \frac{3\sqrt{27}}{7}} : \frac{\frac{5}{\sqrt{36}} - \frac{7}{42-22}}{7-0,6} - \left(\sqrt{\frac{49}{9}} - \frac{17}{13}\right)\right] = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{4}{5} - \frac{3 \cdot 3}{7}} : \frac{\frac{5}{6} - \frac{7}{20}}{7 - \frac{6}{10}} - \left(\frac{7}{3} - \frac{17}{13}\right) = \frac{\frac{2+3}{6}}{\frac{28-15}{35}} \cdot \frac{\frac{25-21}{35}}{\frac{10-7}{12}} - \frac{91-51}{39} =$
 $\frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{35} - \frac{40}{39}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{35}{13} - \frac{4}{35} \cdot \frac{12}{3} - \frac{40}{39}} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} - \frac{40}{39} = \frac{40}{39} - \frac{40}{39} = 0$

Mocniny a odmocniny:

7. $0,176 \cdot 10^3 + 0,295 \cdot 10^2 + 257 \cdot 10^{-3} = 176 + 29,5 + 0,257$

- (A) 231,5 (B) 147,447 (C) 205,757 (D) 0,727 (E) 15,467

Oprava zadání: $4853 \cdot 10^{-3} + 0,347 \cdot 10^2 - 0,00035 \cdot 10^5 = 4,853 + 34,7 - 35$

- (A) 31,5 (B) 4,553 (C) 195,773 (D) 0,823 (E) 35,467

8. $(64^5)^3 = (8^2)^{15} = ((2^3)^2)^{15} = 2^{90}$

9. $10 \cdot \sqrt{0,04} - (-2) \cdot (-2)^2 - \frac{(0,02)^2}{0,0008} = 10 \cdot \frac{2}{10} - (-8) - \frac{(2 \cdot 10^{-2})^2}{8 \cdot 10^{-4}} = 2 + 8 - \frac{4 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-4}} = 2 + 8 - \frac{1}{2} = 9,5$

10. $\frac{7^2 \cdot 75 \cdot 36^2}{14 \cdot 6^3 \cdot 5^5} = \frac{7^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 6^4}{2 \cdot 7 \cdot 6^3 \cdot 5^5} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 5^3} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 3}{5^3} = \frac{63}{125}$

Komentář [J1]: Nemusíme sčítat všechny 3 hodnoty

Komentář [J2]: Umocnění mocniny: exponenty násobíme

Výrazy

1. **Oprava zadání:** $x^2 + 4 - 4x - a^2 = x^2 - 4x + 4 - a^2 = (x-2)^2 - a^2 = (x-2+a)(x-2-a)$

Upravte následující výrazy:

2. $\frac{x-1}{x^2-1} : \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{(x+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad x \neq \pm 1$

3. $\left(\frac{4a}{a+1} + 2\right) : \left(1 - \frac{8a^2}{1-a^2}\right) = \frac{4a+2(a+1)}{a+1} : \frac{1-a^2-8a^2}{1-a^2} = \frac{4a+2a+2}{a+1} \cdot \frac{1-a^2}{1-9a^2} = \frac{2(3a+1)}{a+1} \cdot \frac{(1+a)(1-a)}{(1+3a)(1-3a)} = \frac{2(1-a)}{1-3a} \quad a \neq \pm 1, a \neq \pm \frac{1}{3}$

4.
$$\frac{3b}{b+y} - \frac{b}{y-b} - \frac{2by}{b^2-y^2} = \frac{3b}{b+y} - \frac{b}{(-1)(b-y)} - \frac{2by}{(b+y)(b-y)} = \frac{3b(b-y) + b(b+y) - 2by}{(b+y)(b-y)} =$$

$$= \frac{3b^2 - 3by + b^2 + by - 2by}{(b+y)(b-y)} = \frac{4b^2 - 4by}{(b+y)(b-y)} = \frac{4b(b-y)}{(b+y)(b-y)} = \frac{4b}{b+y} \quad (b \neq y, b \neq -y)$$

5. $\frac{x^3 - xy^2}{4x^2 - 8xy + 4y^2} : \frac{x^2 + xy}{4} = \frac{x(x^2 - y^2)}{4(x^2 - 2xy + y^2)} \cdot \frac{4}{x(x+y)} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x-y)} \cdot \frac{1}{(x+y)} = \frac{1}{x-y}$
 $(x \neq y, x \neq -y, x \neq 0)$

6. **Oprava zadání:** $y = -3?$

3. $(y-1) - y = 3, [(-3) - 1] - (-3) = 3, (-4) + 3 = -12 + 3 = -9$

E) jiný výsledek

7. $16y^4 - 16 = 16(y^4 - 1) = 16(y^2 + 1)(y^2 - 1) = 16(y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)$

A) $(y + 1)$

Procenta, přímá a nepřímá úměra

1. $1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2 \rightarrow 2,5 \text{ aru} = 250 \text{ m}^2$

$250 \text{ m}^2 \dots\dots\dots 100\%$

$50 \text{ m}^2 \dots\dots\dots x \%$

$x : 100 = 50 : 250$

$x = 20\%$

50 m^2 ze $2,5 \text{ aru}$ je 20% A) 20% **Zopakujte si převody jednotek!!!!**

2. Neznámé číslo je 100%

a) Zvětšíme ho o 17% , dostaneme $100\% + 17\%$. Číslo X tedy představuje 117% neznámého čísla.

b) Neznámé číslo zmenšíme o 8% , dostaneme $100\% - 8\% = 92\%$. Číslo Y představuje 92% neznámého čísla.

$X \dots 117\%$, $Y \dots 92\%$, $117 - 92 = 25\%$

$25\% \dots\dots 50$ nebo rovnice: $1,17x - 0,92x = 50$

$1\% \dots\dots 2$ $0,25x = 50$

$100\% \dots\dots 200$ $x = 200$

Neznámé číslo je 200 . A) 200

Komentář [J3]:

Vzorec: $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

Komentář [J4]:

Vzorec: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

3.

Karelx známek	}	rovnice: $x + 1,22x = 444$
Milan1,22x (o 22% víc námeč)		$2,22x = 444$
		$x = 200$

Milan má 244 známek. B) 244

4. 1. bednax	}	rovnice: $x + 1,2x + 1,5x = 122,1$
2. bedna.....1,2x		$3,7x = 122,1$
3. bedna.....1,24.1,2x = 1,5x		$x = 33$

1. bedna33 kg
2. bedna.....39,6 kg
3. bedna.....49,5 kg

Třetí bedna vážila 49,5 kg. A) 49,5 kg

5. Před zdražením představuje cena 100 %.	}	122 %5368 Kč
Po zdražení představuje cena 122 %		1 %.....44 Kč
		100 % 4400 Kč

nebo rovnice:

Cena před zdraženímx	}	$x + 0,22x = 5368$
Zdražení o0,22x		$1,22x = 5368$
		$x = 4400$

Přehrávač stál před zdražením 4 400 Kč C) 4 400 Kč

6. Cena pračky před slevoux	
Cena po 1. slevě0,8x	
Cena po 2. slevě0,8.0,8x7040 Kč	rovnice: $0,8 \cdot 0,8x = 7040$
	$0,64x = 7040$
	$x = 11\ 000$

Před první slevou byla cena pračky 11 000 Kč: D) jiný výsledek

7. 360°100 %	
108°x %	
$x = 30$ %	
Kruhová výseč představuje 30 % plochy kruhu. B) 30%	

8. Nepřímá úměra (více malířů natře stěnu pokoje za kratší čas)

↓ 10 malířů.....5 hod ↑
 ↓ 20 malířů.....x hod ↑

$$x : 5 = 10 : 20$$

$$x = 2,5 \text{ hod } 20 \text{ malířů natře stěnu pokoje za } 2,5 \text{ hodin.}$$

Přímá úměra: čím více stěn, tím delší čas:

20 malířů natře 1 stěnuza 2,5 hodin

20 malířů natře 5 stěnuza $5 \cdot 2,5 \text{ hodin} = 12,5 \text{ hod}$

Dvacet malířů natře 5 stěn pokoje za 12,5 hodin. D) jiný výsledek

9. Přímá úměrnost: $y = kx$

$$\text{Souřadnice bodu: } [x, y] \rightarrow x = \frac{3}{7} \quad y = \frac{9}{14}$$

$$\frac{9}{14} = k \cdot \frac{3}{7} \quad / \cdot 14$$

$$9 = k \cdot 6$$

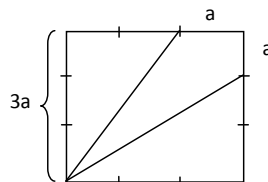
$$k = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$\text{B) } y = \frac{3}{2}x$$

Výpočet obsahu obrazce

- S_1 ...obsah celého čtverce $25 \times 25 \text{ m}$, $S_1 = 25^2 = 625 \text{ m}^2$
 S_2 ...obsah výřezu $11 \times 11 \text{ m}$, $S_2 = 121 \text{ m}^2$
 S ...obsah vyšrafované části $S = S_1 - S_2 = 625 - 121 = 504 \text{ m}^2$
 Obsah vyšrafované části je 504 m^2

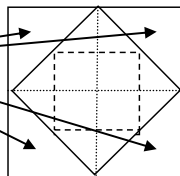
- S ...obsah čtverce $3a \times 3a$, $S = (3a)^2 = 9a^2$
 S_1 ...obsah pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $3a$ a $2a$
 $S_1 = \frac{3a \cdot 2a}{2}$
 Obsah vyšrafované části: $S - 2S_1 = 9a^2 - 6a^2 = 3a^2$
 Obsah vyšrafované části je $3a^2$.



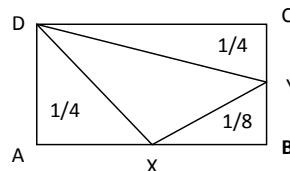
3.

Tyto 4 trojúhelníky tvoří přesně $\frac{1}{2}$ původního čtverce.

Třetí, nejmenší čtverec je polovinou poloviny $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 Čtverec číslo 3 tvoří $\frac{1}{4}$, tj. 25 % původního čtverce



4. Obsah obdélníku ABCD 24×14 cm je $S = 336$ cm²
 Obsah trojúhelníku DAX s odvěsnami 14 cm a 12 cm $S_1 = 84$ cm²
 Obsah trojúhelníku YCD s odvěsnami 7 cm a 24 cm $S_2 = 84$ cm²
 Obsah trojúhelníku DAX s odvěsnami 7 cm a 12 cm $S_1 = 42$ cm²
 Obsah trojúhelníku XYD $S_4 = S - (S_1 + S_2 + S_3) = 126$ cm²



336.....100 %

126.....x %

$x = 37,5$ %

Obsah trojúhelníku XYD tvoří 37,5 % obdélníku ABCD.

Jiný postup: $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$, tj. 37,5 %

Pravoúhlý trojúhelník

- Délky stran pravoúhlého trojúhelníku musí splňovat Pythagorovu větu:
 $5^2 = 4^2 + 3^2$
 C) 3, 4, 5
- Zadané strany jsou buď dvě odvěsny nebo kratší strana je odvěsna a delší přepona.
 a) délky jsou odvěsny a, b, přepona je c: $c^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow c = 10$ cm
 b) délky jsou odvěsna (např. b) a přepona (c): $a^2 = 8^2 - 6^2 \rightarrow a = 5,3$ cm
 Třetí strana trojúhelníku má velikost 10 cm nebo 5,3 cm.
- Oprava zadání: odvěsna dlouhá 3cm**
 V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku platí:
 $c^2 = 3^2 + 3^2$
 $c = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$
 Přepona je dlouhá A) $3\sqrt{2}$ cm.
- Kružnice je Thaletova kružnice, trojúhelník FGE je tedy pravoúhlý, s pravým úhlem při vrcholu G a platí v něm Pythagorova věta. Poloměr kružnice je polovina přepony tohoto trojúhelníku.
 $r = \frac{\sqrt{12^2 + 5^2}}{2} = \frac{\sqrt{169}}{2} = 6,5$ cm
 Poloměr kružnice je 6,5 cm. E) jiný výsledek

Další příklady

1. K dědečkovi a babičce do velkého stavení na venkově přijely všechny jejich děti i se svými dětmi. Ty vyběhly na svah za stodolou a celé odpoledne sáňkovali a lyžovali. Když přiběhly na svačinu a čaj, bylo v předsíni poházeno 68 kusů bot, 25 sáňek a 28 kusů lyží. Kolik dětí mělo s sebou na kopci sáňky i lyže? (Každé dítě má buď sáňky, nebo lyže, nebo oboje.)

celkem dětí: 68 ks bot \rightarrow 34 dětí
sáňky (s) i lyže (l) x dětí
25 sáňky..... $s + x = 25$
14 lyže (28 kusů lyží!!)... $l + x = 14$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rovnice: } s + l + x = 34 \\ 25 - x + 14 - x + x = 34 \\ 39 - x = 34 \\ x = 5 \end{array} \right\}$$

Sáňky i lyže mělo 5 dětí.

2. Malá firma má 25 zaměstnanců, z toho 12 zaměstnanců má řidičský průkaz, 8 zaměstnanců má svářečský průkaz. 10 zaměstnanců nevlastní ani jeden z těchto průkazů. Kolik zaměstnanců firmy má svářečský i řidičský průkaz zároveň?

Firma má 25 zaměstnanců
12 má řidičský průkaz (ř)
8 má svářečský průkaz (s)
10 ani jeden

$$\left. \begin{array}{l} \text{oba } x \quad \quad \quad \check{r} + s + x + 10 = 25 \\ \check{r} + x = 12 \quad \quad 12 - x + 8 - x + x + 10 = 25 \\ s + x = 8 \quad \quad \quad 30 - x = 25 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 5 \end{array} \right\}$$

Svářečský i řidičský průkaz zároveň má 5 zaměstnanců firmy.

Lineární rovnice

1. $(y - 3)^2 - 1 = -3(-2y + 1) + y^2 - 1$
 $y^2 - 6y + 9 - 1 = 6y - 3 + y^2 - 1$
 $-6y + 8 = 6y - 4$
 $12y = 12$
 $y = 1$ $K = \{1\}$

2. $\frac{2a-14}{a-7} = -3 \wedge (a-7) \quad a - 7 \neq 0, a \neq 7$
 $2a - 14 = -3(a - 7)$
 $2a - 14 = -3a + 21$
 $5a = 35$
 $a = 7, K = \{ \}$ rovnice nemá řešení